

Hong Kong Mathematics Olympiad (2018/19)

Heats (Individual)

香港数学竞赛 (2018/19)

初赛项目(个人)

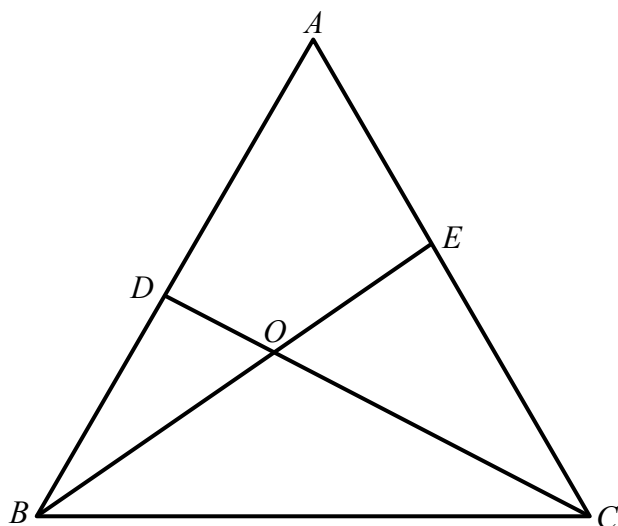
除特别指明外，所有答案须以数字的真确值表达，并化至最简。不接受近似值。
Unless otherwise stated, all answers should be given in exact numerals in their simplest form.
No approximation is accepted.

甲部

Part A

1. 在图一中， ABC 是一个等边三角形。 D 和 E 分别是 AB 和 AC 上的点使 $AE = BD$ 。若 CD 和 BE 相交于 O 及 $\angle COE = y^\circ$ ，求 y 的值。

In Figure 1, ABC is an equilateral triangle. D and E are points on AB and AC respectively such that $AE = BD$. If CD and BE intersect at O and $\angle COE = y^\circ$, find the value of y .



图一

Figure 1

2. 设 O 为极坐标系统的极点。若 $P(6, 240^\circ)$ 向右平移 16 单位至 Q 而 $\triangle OPQ$ 的面积为 T 平方单位，求 T 的值。

Let O be the pole of the polar coordinate system. If $P(6, 240^\circ)$ is translated to the right by 16 units to Q and the area of $\triangle OPQ$ is T square units, find the value of T .

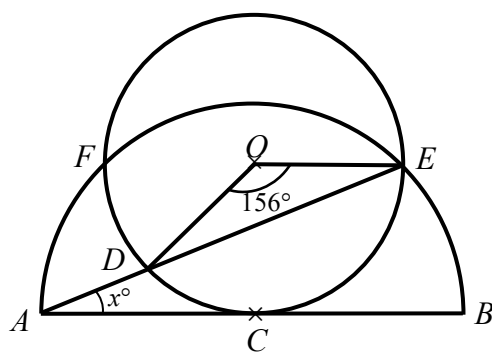
3. 已知 x 及 y 均为实数。若 $y^2 - 4xy + 5x^2 - 8x + 16 = 0$ 及 $F = x - y$ ，求 F 的值。

Given that x and y are real numbers. If $y^2 - 4xy + 5x^2 - 8x + 16 = 0$ and $F = x - y$, find the value of F .

4. 设 n 为正整数。若 $a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ 及 $b = a_{10} - a_5 + a_1$ ，求 b 的值。
 Let n be a positive integer. If $a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ and $b = a_{10} - a_5 + a_1$, find the value of b .

5. 在图二中， O 为圆 DEF 的圆心。 AB 为圆 DEF 在 C 的切线，其中 C 为半圆 ABE 的圆心，且半圆 ABE 通过 F 。 ADE 为一直线。若 $\angle DOE = 156^\circ$ 及 $\angle BAE = x^\circ$ ，求 x 的值。

In Figure 2, O is the centre of the circle DEF . AB is the tangent to the circle DEF at C , where C is the centre of the semicircle ABE , which also passes through F . ADE is a straight line. If $\angle DOE = 156^\circ$ and $\angle BAE = x^\circ$, find the value of x .

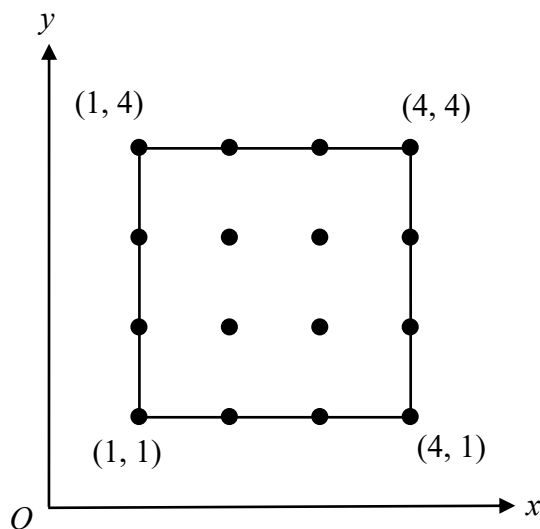


图二

Figure 2

6. 在图三中，直角坐标平面上一个正方形的四个顶点的坐标分别为 $(1, 1)$ 、 $(1, 4)$ 、 $(4, 1)$ 及 $(4, 4)$ 。若在该正方形中（包括边界）选择任何三个坐标均为整数的点，问可组成多少个三角形？

In Figure 3, the vertices of a square in the rectangular coordinate plane are $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(4, 1)$ and $(4, 4)$. How many triangles can be formed by selecting any three points in the square (including the boundary) with integer coordinates?

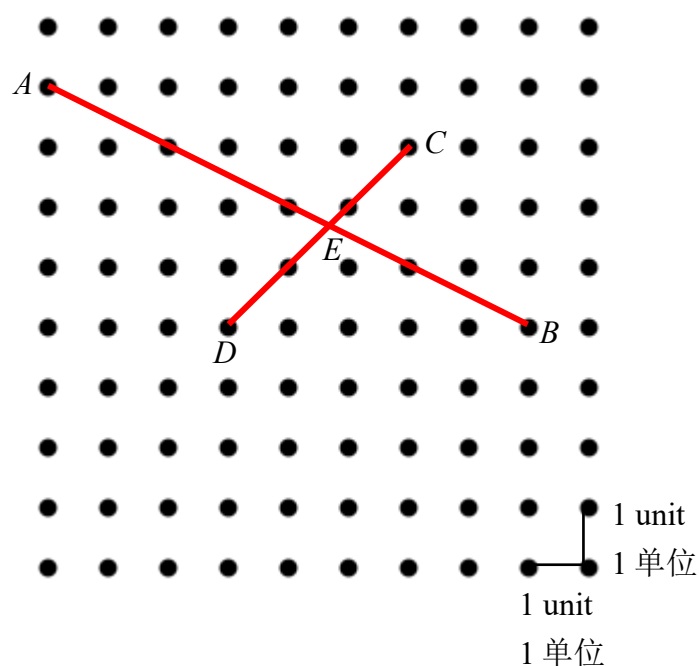


图三

Figure 3

7. 在图四中, AB 与 CD 相交于 E 。设 q 单位为 AE 的长度。求 q 的值。

In Figure 4, AB and CD intersect at E . Let q units be the length of AE . Find the value of q .

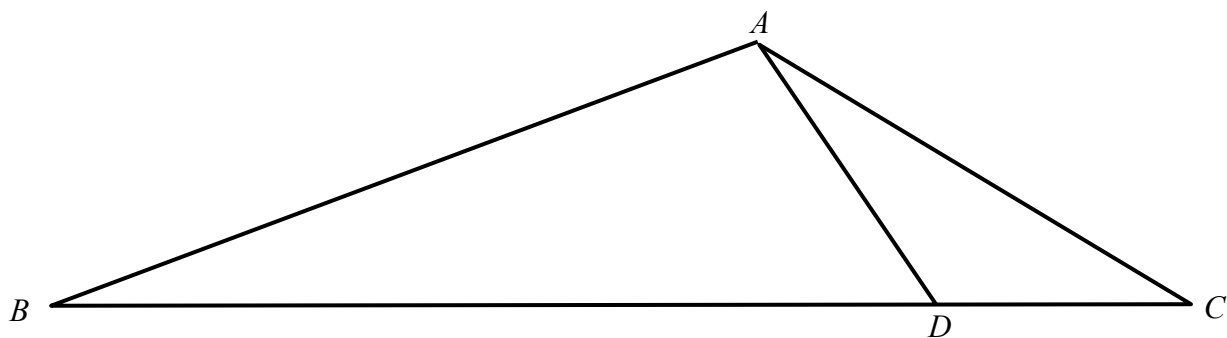


图四

Figure 4

8. 在图五中, D 是在 BC 上的一点使 $\angle ABD = \angle CAD$ 及 $\frac{BD}{AC} = \frac{8}{3}$ 。若 $\frac{\Delta ABD \text{ 的面积}}{\Delta ADC \text{ 的面积}} = k$, 求 k 的值。

In Figure 5, D is a point on BC such that $\angle ABD = \angle CAD$ and $\frac{BD}{AC} = \frac{8}{3}$. If $\frac{\text{Area of } \Delta ABD}{\text{Area of } \Delta ADC} = k$, find the value of k .



图五

Figure 5

9. 已知 α 及 β 为方程 $x^2 + 32x - 1 = 0$ 的两个根。若 $P = (\alpha^2 + 31\alpha - 2)(\beta^2 + 33\beta)$ ，求 P 的值。

Given that α and β are the two roots of the equation $x^2 + 32x - 1 = 0$. If $P = (\alpha^2 + 31\alpha - 2)(\beta^2 + 33\beta)$, find the value of P .

10. 设 $c = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ 。若 $w = c^2$ ，求 w 。

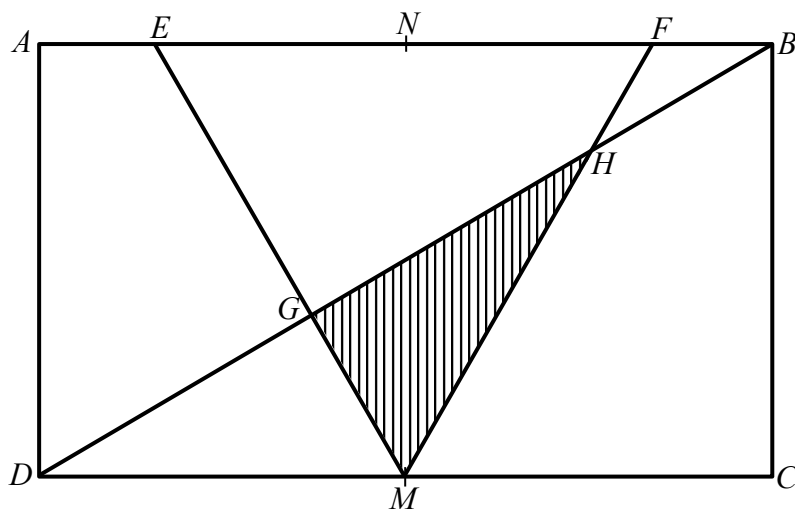
Let $c = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$. If $w = c^2$, find w .

乙部

Part B

11. 在图六中， $ABCD$ 为一个长方形。 M 和 N 分别是 DC 和 AB 的中点且 $AE : EN = BF : FN = 1 : 2$ 。 EM 和 FM 分别相交 DB 于 G 及 H 。若长方形 $ABCD$ 及三角形 GHM 的面积分别是 96 和 S ，求 S 的值。

In Figure 6, $ABCD$ is a rectangle. M and N are the mid-points of DC and AB respectively and $AE : EN = BF : FN = 1 : 2$. EM and FM intersect DB at G and H respectively. If the areas of the rectangle $ABCD$ and the triangle GHM are 96 and S respectively, find the value of S .



图六

Figure 6

12. 在三角形 ABC 中， $AB = 14$ 、 $BC = 48$ 及 $AC = 50$ 。将 P 及 Q 分别记为 $\triangle ABC$ 的内心及外心。设 d 单位为 PQ 的长度。求 d 的值。

In triangle ABC , $AB = 14$, $BC = 48$ and $AC = 50$. Denote the in-centre and circumcentre of $\triangle ABC$ by P and Q respectively. Let d units be the length of PQ . Find the value of d .

13. 已知正整数 a 、 b 及 c 满足下列条件：

(i) $a > b > c$,

(ii) $(a-b)(b-c)(a-c) = 84$,

(iii) $abc < 100$ 。

设 M 为 a 的最大值。求 M 。

Given that a , b and c are positive integers satisfying the following conditions:

(i) $a > b > c$,

(ii) $(a-b)(b-c)(a-c) = 84$,

(iii) $abc < 100$.

Let M be the maximum value of a . Find M .

14. 已知 $3\sin x + 2\sin y = 4$ 。设 N 为 $3\cos x + 2\cos y$ 的最大值。求 N 。

Given that $3\sin x + 2\sin y = 4$. Let N be the maximum value of $3\cos x + 2\cos y$. Find N .

15. 已知 x 、 y 、 z 为正实数且满足

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ y^2 + yz + z^2 = 21 \\ x^2 + xz + z^2 = 28 \end{cases}$$

若 $a = x + y + z$ ，求 a 的值。

Given that x, y, z are positive real numbers satisfying

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ y^2 + yz + z^2 = 21 \\ x^2 + xz + z^2 = 28 \end{cases}$$

If $a = x + y + z$, find the value of a .

完

END